HIMPUNAN

Nur Hasanah, M.Cs

Cara Penyajian Himpunan

1. Enumerasi

Setiap anggota himpunan didaftarkan secara rinci.

Contoh:

Himpunan lima bilangan genap positif pertama: B ={2, 4, 6, 8, 10}.

C = {kucing, a, Amir, 10, paku}

R = { a, b, {a, b, c}, {a, c} }

C = {a, {a}, {{a}} }

K = { {} }

Himpunan 100 buah bilangan asli pertama: {1, 2, ..., 100 }

Himpunan bilangan bulat ditulis sebagai {…, -2, -1, 0, 1, 2, …}.

Cara Penyajian Himpunan

Keanggotaan

$x \in A$: x merupakan anggota himpunan A;
$x \notin A$: x bukan merupakan anggota himpunan A.

Contoh:
$A = \{1, 2, 3, 4\}$, $R = \{ a, b, \{a, b, \text{c}\}, \{a, c\} \}$, $K = \{\{\}\}$

Maka:
$3 \in A$
$\{a, b, c\} \in R$
$c \notin R$
$\{\} \in K$
$\{\} \notin R$

Cara Penyajian Himpunan

2. Simbol-simbol Baku

P = himpunan bilangan bulat positif = { 1, 2, 3, ... }
N = himpunan bilangan alami (natural) = { 1, 2, ... }
Z = himpunan bilangan bulat = { ..., -2, -1, 0, 1, 2, ... }
Q = himpunan bilangan rasional
R = himpunan bilangan riil
C = himpunan bilangan kompleks

Himpunan yang universal: **semesta**, disimbolkan dengan **U**.

Contoh:
Misalkan U = {1, 2, 3, 4, 5} dan *A* adalah himpunan bagian dari U, dengan *A* = {1, 3, 5}.

Cara Penyajian Himpunan

3. Notasi Pembentuk Himpunan

Notasi: { x | syarat yang harus dipenuhi oleh x }

Contoh:

i. A adalah himpunan bilangan bulat positif lebih kecil dari 5

$A = \{ x \mid x$ bilangan bulat positif lebih kecil dari 5$\}$

atau $A = \{ x \mid x \in P, x < 5 \}$

yang ekivalen dengan $A = \{1, 2, 3, 4\}$

ii. $M = \{ x \mid x$ adalah mahasiswa yang mengambil kuliah matematika diskrit $\}$

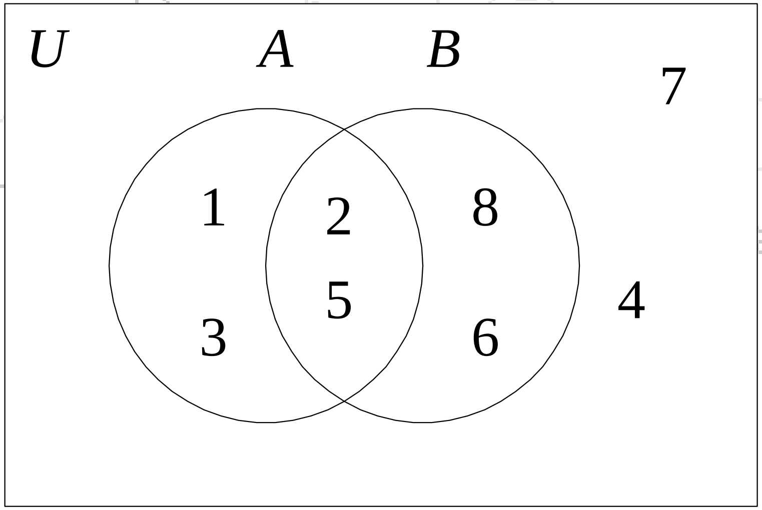
Cara Penyajian Himpunan

4. Notasi Pembentuk Himpunan Diagram Venn

Contoh:

Misalkan U = {1, 2, …, 7, 8}, *A* = {1, 2, 3, 5} dan *B* = {2, 5, 6, 8}.

Diagram Venn:



Kardinalitas

Jumlah elemen di dalam A disebut **kardinal** dari himpunan A.

Notasi: $n(A)$ atau $|A|$

Contoh:

i. $B = \{ x \mid x$ merupakan bilangan prima lebih kecil dari 20 $\}$,
atau $B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$ maka $|B| = 8$

ii. $T = \{$kucing, a, Amir, 10, paku$\}$, maka $|T| = 5$

iii. $A = \{a, \{a\}, \{\{a\}\} \}$, maka $|A| = 3$

Himpunan kosong (*null set*)

- Himpunan dengan kardinal = 0 disebut himpunan kosong (*null set*).
- Notasi : ∅ atau {}

Contoh:

i. $E = \{ x \mid x < x \}$, maka $n(E) = 0$

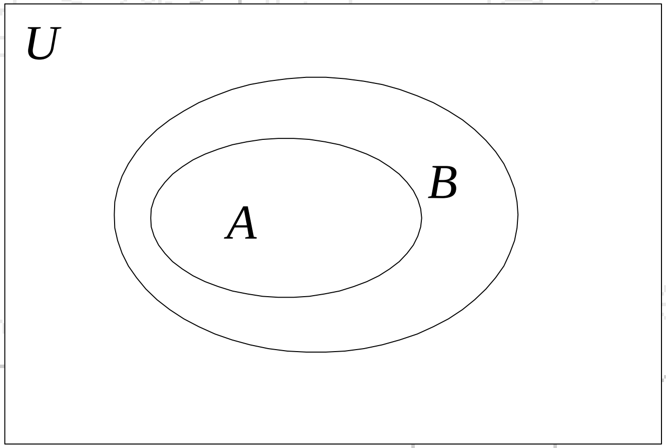
ii. P = { orang Indonesia yang pernah ke bulan }, maka $n(P) = 0$

iii. $A = \{x \mid x$ adalah akar persamaan kuadrat $x^2 + 1 = 0 \}$, $n(A) = 0$

- Himpunan {{ }} dapat juga ditulis sebagai {∅}
- Himpunan {{ }, {{ }}} dapat juga ditulis sebagai {∅, {∅}}
- {∅} bukan himpunan kosong karena ia memuat satu elemen yaitu himpunan kosong.

Himpunan Bagian (*Subset*)

- Himpunan A dikatakan himpunan bagian dari himpunan B jika dan hanya jika setiap elemen A merupakan elemen dari B.
- Dalam hal ini, B dikatakan *superset* dari A.
- Notasi: $A \subseteq B$
- Diagram Venn:



TEOREMA 1. Untuk sembarang himpunan A berlaku hal-hal sebagai berikut:
(a) A adalah himpunan bagian dari A itu sendiri (yaitu, $A \subseteq A$).
(b) Himpunan kosong merupakan himpunan bagian dari A ($\varnothing \subseteq A$).
(c) Jika $A \subseteq B$ dan $B \subseteq C$, maka $A \subseteq C$

Himpunan Bagian (*Subset*)

Contoh:

i. $\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$

ii. $\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3\}$

- $A \subseteq B$ berbeda dengan $A \subset B$
- $A \subset B$: A adalah himpunan bagian dari B tetapi $A \neq B$.
- A adalah himpunan bagian sebenarnya (*proper subset*) dari B.
  Contoh: $\{1\}$ dan $\{2, 3\}$ adalah *proper subset* dari $\{1, 2, 3\}$
- $A \subseteq B$: digunakan untuk menyatakan bahwa A adalah himpunan bagian (*subset*) dari B yang memungkinkan $A = B$.

Himpunan yang Sama

- $A = B$ jika dan hanya jika setiap elemen A merupakan elemen B dan sebaliknya setiap elemen B merupakan elemen A.
- $A = B$ jika A adalah himpunan bagian dari B dan B adalah himpunan bagian dari A. Jika tidak demikian, maka $A \neq B$.
- Notasi : $A = B \leftrightarrow A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$

Himpunan yang Sama

Contoh:

i. Jika $A = \{ 0, 1 \}$ dan $B = \{ x \mid x (x - 1) = 0 \}$, maka $A = B$

ii. Jika $A = \{ 3, 5, 8, 5 \}$ dan $B = \{5, 3, 8 \}$, maka $A = B$

iii. Jika $A = \{ 3, 5, 8, 5 \}$ dan $B = \{3, 8\}$, maka $A \neq B$

Untuk tiga buah himpunan, A, B, dan C berlaku aksioma berikut:

a) $A = A$, $B = B$, dan $C = C$

b) jika $A = B$, maka $B = A$

c) jika $A = B$ dan $B = C$, maka $A = C$

Himpunan yang Ekivalen

- Himpunan A dikatakan ekivalen dengan himpunan B jika dan hanya jika kardinal dari kedua himpunan tersebut sama.
- Notasi : $A \sim B \leftrightarrow |A| = |B|$

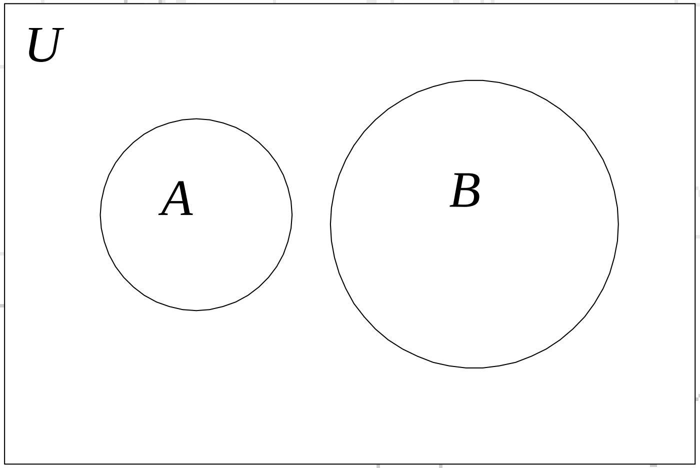
Contoh:

- Misalkan $A = \{ 1, 3, 5, 7 \}$ dan $B = \{ a, b, c, d \}$, maka:

  $A \sim B$ sebab $|A| = |B| = 4$

Himpunan Saling Lepas

- Dua himpunan A dan B dikatakan saling lepas (*disjoint*) jika keduanya tidak memiliki elemen yang sama.
- Notasi : $A \,//\, B$
- Diagram Venn:



Contoh:

Jika $A = \{ x \mid x \in P, x < 8 \}$ dan $B = \{ 10, 20, 30, ... \}$, maka $A \,//\, B$.

Himpunan Kuasa

- Himpunan kuasa (*power set*) dari himpunan A adalah suatu himpunan yang elemennya merupakan semua himpunan bagian dari A, termasuk himpunan kosong dan himpunan A sendiri.
- Notasi : $P(A)$ atau 2^A
- Jika $|A| = m$, maka $|P(A)| = 2^m$

Contoh 1:

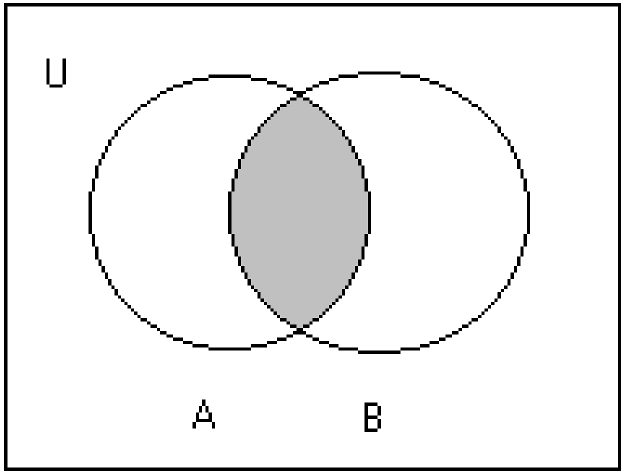
Jika $A = \{ 1, 2 \}$, maka $P(A) = \{\emptyset, \{ 1 \}, \{ 2 \}, \{ 1, 2 \}\}$

- Himpunan kuasa dari himpunan kosong adalah $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$, dan himpunan kuasa dari himpunan $\{\emptyset\}$ adalah $P(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

Operasi Terhadap Himpunan

1. Irisan (*intersection*)

Notasi : $A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ dan } x \in B \}$



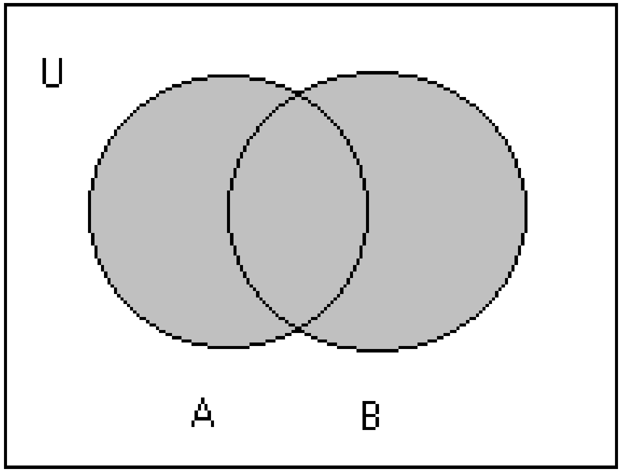
Contoh:

- Jika $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ dan $B = \{4, 10, 14, 18\}$, maka $A \cap B = \{4, 10\}$
- Jika $A = \{ 3, 5, 9 \}$ dan $B = \{ -2, 6 \}$, maka $A \cap B = \varnothing$. Artinya: $A \mathbin{//} B$

Operasi Terhadap Himpunan

2. Gabungan (*union*)

Notasi : $A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ atau } x \in B \}$



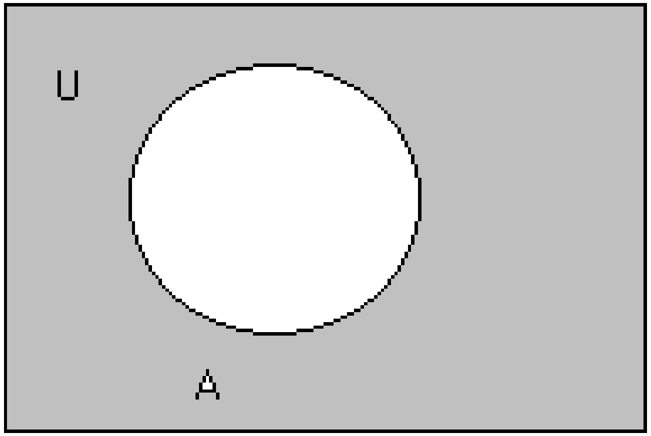
Contoh:

- Jika $A = \{ 2, 5, 8 \}$ dan $B = \{ 7, 5, 22 \}$, maka $A \cup B = \{ 2, 5, 7, 8, 22 \}$
- $A \cup \varnothing = A$

Operasi Terhadap Himpunan

3. Komplemen (*complement*)

Notasi : $\overline{A} = \{ x \mid x \in U, x \notin A \}$



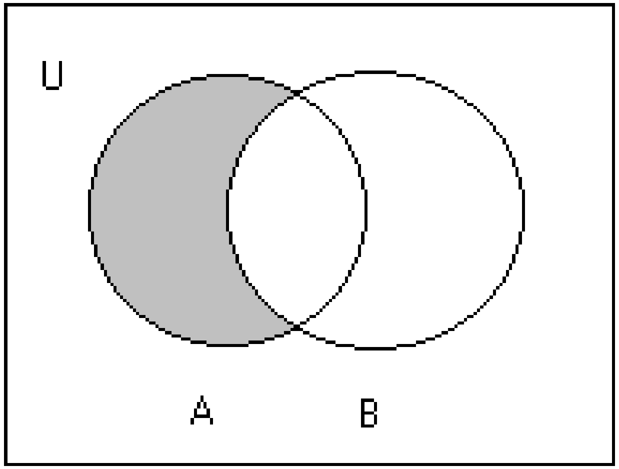
Contoh:

- Misalkan U = { 1, 2, 3, ..., 9 },
- jika $A = \{1, 3, 7, 9\}$, maka $\overline{A} = \{2, 4, 6, 8\}$
- jika $A = \{ x \mid x/2 \in P, x < 9 \}$, maka $\overline{A} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

Operasi Terhadap Himpunan

4. Selisih (*difference*)

Notasi : $A - B = \{ x \mid x \in A \text{ dan } x \notin B \} = A \cap \overline{B}$ }



Contoh:

- Jika $A = \{ 1, 2, 3, ..., 10 \}$ dan $B = \{ 2, 4, 6, 8, 10 \}$, maka $A - B = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \}$ dan $B - A = \varnothing$
- $\{1, 3, 5\} - \{1, 2, 3\} = \{5\}$, tetapi $\{1, 2, 3\} - \{1, 3, 5\} = \{2\}$

Operasi Terhadap Himpunan

Buatlah arsiran yg sesuai:

$$A \cap B^C \quad (A \cup B)^C$$

$$A^C \cup B \cup C$$

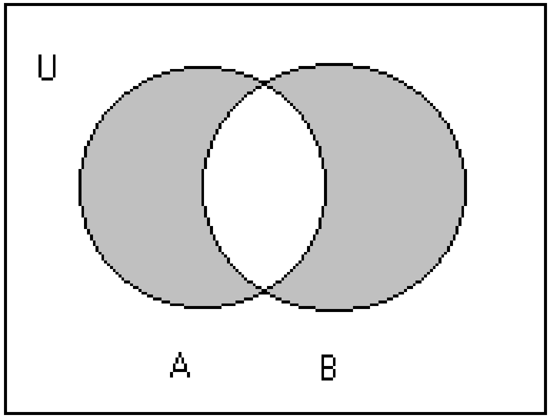
$$A \cap B^C \cap C^C$$

$$A^C \cap (B \cup C)$$

Operasi Terhadap Himpunan

5. Beda Setangkup (*Symmetric Difference*)

Notasi: $A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$



Contoh:

Jika $A = \{ 2, 4, 6 \}$ dan $B = \{ 2, 3, 5 \}$,
maka $A \oplus B = \{ 3, 4, 5, 6 \}$

TEOREMA 2.
Beda setangkup memenuhi sifat-sifat berikut:
(a) $A \oplus B = B \oplus A$ (hukum komutatif)
(b) $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$ (hukum asosiatif)

Operasi Terhadap Himpunan

Contoh:

- U = himpunan mahasiswa
- *P* = himpunan mahasiswa yang nilai ujian UTS di atas 80
- *Q* = himpunan mahasiswa yang nilain ujian UAS di atas 80

  Seorang mahasiswa mendapat nilai A jika nilai UTS dan nilai UAS keduanya di atas 80, mendapat nilai B jika salah satu ujian di atas 80, dan mendapat nilai C jika kedua ujian di bawah 80.

- "Semua mahasiswa yang mendapat nilai A" : $P \cap Q$
- "Semua mahasiswa yang mendapat nilai B" : $P \oplus Q$
- "Semua mahasiswa yang mendapat nilai C" : $U - (P \cup Q)$

Operasi Terhadap Himpunan

6. Perkalian Kartesian (*cartesian product*)

Notasi: $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ dan } b \in B\}$

Catatan:

1. Jika A dan B merupakan himpunan berhingga, maka: $|A \times B| = |A| \cdot |B|$
2. $(a, b) \neq (b, a)$.
3. $A \times B \neq B \times A$ dengan syarat A atau B tidak kosong.

Contoh : $C = \{1, 2, 3\}$, dan $D = \{a, b\}$

- $D \times C = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$
- $C \times D = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$
- $D \times C \neq C \times D$.

4. Jika $A = \varnothing$ atau $B = \varnothing$, maka $A \times B = B \times A = \varnothing$

Perampatan Operasi Himpunan

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \mathop{\times}_{i=1}^{n} A_i$$

$$A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots \oplus A_n = \bigoplus_{i=1}^{n} A_i$$

Hukum-hukum Himpunan

- Disebut juga sifat-sifat (*properties*) himpunan
- Disebut juga hukum aljabar himpunan

1. Hukum identitas: – $A \cup \varnothing = A$ – $A \cap U = A$	2. Hukum *null*/dominasi: – $A \cap \varnothing = \varnothing$ – $A \cup U = U$
3. Hukum komplemen: – $A \cup \overline{A} = U$ – $A \cap \overline{A} = \varnothing$	4. Hukum idempoten: – $A \cup A = A$ – $A \cap A = A$

Hukum-hukum Himpunan

5. Hukum involusi: – $\overline{(\overline{A})} = A$	6. Hukum penyerapan (absorpsi): – $A \cup (A \cap B) = A$ – $A \cap (A \cup B) = A$
7. Hukum komutatif: – $A \cup B = B \cup A$ – $A \cap B = B \cap A$	8. Hukum asosiatif: – $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ – $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
9. Hukum distributif: – $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ – $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	10. Hukum De Morgan: – $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ – $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
11. Hukum 0/1 – $\overline{\varnothing} = \mathrm{U}$ – $\overline{\mathrm{U}} = \varnothing$	

Prinsip Inklusi-Eksklusi

Untuk dua himpunan A dan *B*:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$|A \oplus B| = |A| + |B| - 2|A \cap B|$$

Prinsip Inklusi-Eksklusi

Untuk tiga buah himpunan A, B, dan C, berlaku

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Untuk himpunan A_1, A_2, ..., A_r, berlaku:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_r| = |A_i| - |A_i \cap A_j| + |A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots + (-1)^{r-1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_r|$$

Contoh Soal

Dari 32 orang yg mengumpulkan kertas atau botol, 30 orang mengumpulkan kertas, 14 orang mengumpulkan botol.

- Berapa jumlah orang mengumpulkan keduanya?
- Yang hanya mengumpulkan kertas saja?
- Yang hanya mengumpulkan botol saja?

Contoh Soal

Mahasiswa di suatu asrama ditanya apakah mereka mempunyai majalah ataukah koran dalam kamar mereka. Hasilnya adalah :
650 mhs mempunyai majalah, 150 tidak mempunyai majalah, 175 mempunyai koran dan 50 orang tidak memiliki majalah ataupun koran.

- Berapakah jumlah mahasiswa yg tinggal di asrama tersebut ?
- Berapakah yang punya keduanya majalah dan koran ?
- Berapakah yang hanya memiliki koran ?

Contoh Soal

100 mhs dari total 120 mhs mengikuti setidaknya 1 kursus bhs perancis, jerman dan rusia. Selain itu:
65 belajar bhs perancis, 40 belajar bhs jerman, 42 belajar bhs rusia, 20 belajar bhs perancis dan jerman, 25 belajar bhs perancis dan rusia, 15 belajar bhs jerman dan rusia. Tentukan:

- Jumlah mhs yg belajar ketiga bahasa.
- Jumlah mhs yang belajar dua bahasa saja.

Tipe *Set* dalam Bahasa Pascal

Bahasa Pascal menyediakan tipe data khusus untuk himpunan, yang bernama *set*. Tipe *set* menyatakan himpunan kuasa dari tipe ordinal (*integer*, *character*).

Contoh:

```
type
        HurufBesar = 'A'..'Z';{ enumerasi }
        Huruf = set of HurufBesar;
     var
        HurufKu : Huruf;
```

Tipe *Set* dalam Bahasa Pascal

Nilai untuk peubah `HurufKu` dapat diisi dengan pernyataan berikut:

```
HurufKu:=['A', 'C', 'D'];
HurufKu:=['M'];
HurufKu:=[];        { himpunan kosong }
```

Tipe *Set* dalam Bahasa Pascal

Operasi yang dapat dilakukan pada tipe himpunan adalah operasi gabungan, irisan, dan selisih seperti pada contoh berikut:

```
{gabungan}
HurufKu:=['A', 'C', 'D'] + ['C', 'D', 'E'];

{irisan}
HurufKu:=['A', 'C', 'D'] * ['C', 'D', 'E'];

{selisih}
HurufKu:=['A', 'C', 'D'] - ['C', 'D', 'E'];
```

Referensi

- Munir, R., 2005, Matematika Diskrit, Penerbit IF, Bandung
- A. Rosen, H Kenneth (2012). Discrete Mathematics and Its Applications. Mc Graw Hill.